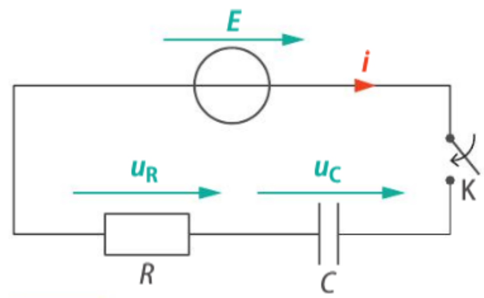


b. Équation différentielle régissant $u_C(t)$

Loi des mailles dans le circuit pour $t > 0$ s : $-E + u_R + u_C = 0$
Loi d'Ohm associée au dipôle ohmique : $u_R = Ri$
Il vient alors : $Ri + u_C = E$

Or, d'après le paragraphe **2d**, $i = C\dfrac{du_C}{dt}$.

On obtient l'**équation différentielle** régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge :

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad \text{ou encore} \quad \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{E}{RC}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Équation différentielle p. 28 à 31

Notation générale	Notation ici
Équation différentielle	
$y' = ay + b$	$\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{u_C}{RC} + \dfrac{E}{RC}$
Fonction et variable	
$y(x)$	$u_C(t)$
Paramètres	
a	$-\dfrac{1}{RC}$
b	$\dfrac{E}{RC}$
Solution générale de l'équation homogène	
$y_h(x) = Ae^{ax}$	$u_{Ch}(t) = Ae^{-t/RC}$
Solution particulière	
$y_p = -\dfrac{b}{a}$	$u_{Cp}(t) = E$
Solution générale de l'équation	
$y(x) = Ae^{ax} - \dfrac{b}{a}$	$u_C(t) = Ae^{-t/RC} + E$

c. Résolution de l'équation différentielle

- La **solution particulière** de cette équation différentielle est $u_{Cp} = E$ qui est une fonction constante du temps.

La **solution générale** de l'équation homogène est de la forme :

$$u_{Ch}(t) = Ae^{-t/RC}$$

où la constante A dépend de la condition initiale.
La solution générale de l'équation différentielle est :

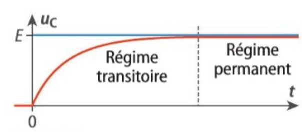
$$u_C(t) = u_{Cp} + u_{Ch}(t) = E + Ae^{-t/RC}$$

- **Condition initiale :** le condensateur est déchargé avant qu'on ferme l'interrupteur : $u_C(t) = 0$ V pour $t < 0$ s.

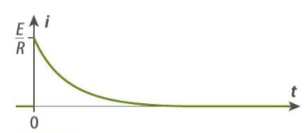
Comme u_C est une fonction continue du temps, on peut écrire $u_C(0) = 0$ V.
Ceci implique que $E + Ae^{-0/RC} = 0$, donc que $A = -E$.

Évolution de la tension aux bornes du condensateur en charge

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC})$$



Doc. 16a Tension aux bornes du condensateur lors de la charge.



Doc. 16b Intensité du courant dans le condensateur lors de la charge.

3 Activité d'un échantillon radioactif

L'activité d'un échantillon radioactif assez grand est l'opposé de la dérivée temporelle du nombre de noyaux radioactifs qu'il contient :

$$A(t) = -\frac{dN}{dt}(t)$$

c. Constante radioactive d'un noyau radioactif

L'activité est une grandeur extensive* : si un échantillon de noyaux radioactifs a une activité donnée, un échantillon contenant le double de noyaux identiques a une activité deux fois plus élevée.

L'activité $A(t)$ d'un échantillon de noyaux radioactifs est **proportionnelle** au nombre de noyaux $N(t)$ qu'il contient :

$$A(t) = \lambda N(t)$$

La constante de proportionnalité λ (*lambda*) est nommée **constante radioactive** et ne dépend que du type de noyaux X de l'échantillon. Elle s'exprime en s^{-1}.

MaThs

Notation générale	Notation ici
Équation différentielle	
$y' = ay$	$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
Fonction inconnue	
y	N
Variable	
x	t
Paramètre	
a	$-\lambda$
Solution générale	
$y(x) = Ke^{ax}$	$N(t) = Ke^{-\lambda t}$

Équations différentielles p. 28 à 31

a. Équation différentielle vérifiée par $N(t)$

L'activité $A(t)$ due à la désintégration des noyaux X dont la population à une date t est $N(t)$ vérifie deux égalités :

$$A(t) = -\frac{dN}{dt}(t) \quad \text{et} \quad A(t) = \lambda N(t)$$

On en déduit ainsi $-\frac{dN}{dt}(t) = \lambda N(t)$ à tout instant t.

L'**équation différentielle** régissant $N(t)$ est :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{ou} \quad \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et homogène.

b. Loi de la décroissance radioactive

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$N(t) = Ke^{-\lambda t}$$

À $t = 0$ s, l'échantillon contient N_0 noyaux. La **condition initiale** s'écrit donc $N(0) = N_0$, ce qui donne $N_0 = Ke^{-\lambda \times 0}$, soit $K = N_0$.

Loi de la décroissance radioactive
Le nombre de noyaux radioactifs de constante radioactive λ dans un échantillon d'effectif N_0 à la date $t = 0$ s est :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

c. Étude de la loi de la décroissance radioactive

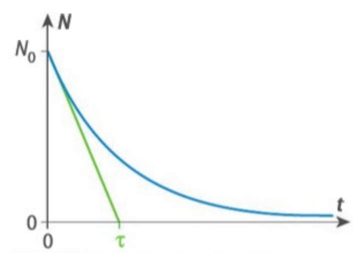
La courbe de $N(t)$ est celle d'une fonction exponentielle décroissante (doc. 10). La rapidité de la décroissance peut être quantifiée par le **coefficient directeur de la tangente à l'origine** à la courbe.
Le coefficient directeur de cette tangente est le nombre dérivé de $N(t)$ à $t = 0$ s. D'après l'équation différentielle, ce nombre vaut :

$$\frac{dN}{dt}(0) = -\lambda N(0) = -\lambda N_0$$

L'ordonnée à l'origine de cette tangente est N_0.
L'équation de la tangente à l'origine est donc $N = -\lambda N_0 t + N_0$.
Elle croise l'axe des abscisses ($N = 0$) à la date τ telle que $-\lambda N_0 \tau + N_0 = 0$, ce qui donne $-\lambda\tau + 1 = 0$, soit $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

La **constante de temps de la désintégration radioactive** τ (*tau*) est la durée au bout de laquelle la tangente à l'origine à la courbe $N(t)$ croise son asymptote horizontale. Elle est égale à $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

La loi de décroissance radioactive peut donc s'écrire $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$.



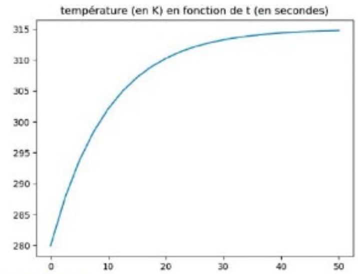
Doc. 10 Détermination graphique de la constante de temps τ.

b. Évolution d'un système au contact d'un thermostat

- On plonge un corps solide, de surface d'aire S, de capacité thermique C, et de température initiale T_0 dans un fluide formant un thermostat, à la température T_{th}, loin de la surface du solide, constante (doc. 20).

- Pendant la durée Δt, la température du corps varie de $T(t)$ à $T(t+\Delta t)$. La variation de son énergie interne vaut donc $\Delta U = C(T(t+\Delta t) - T(t))$ et le bilan d'énergie interne s'écrit $C(T(t+\Delta t) - T(t)) = Q$ soit, en divisant chaque membre de l'égalité par Δt : $C\dfrac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \dfrac{Q}{\Delta t}$

En faisant tendre la durée Δt vers 0, le terme de gauche tend vers le produit de C par la dérivée de T. Le terme de droite s'identifie à la puissance thermique conducto-convective $P_{th,cc}$ donnée par la loi de Newton. On en déduit : $C\dfrac{dT}{dt}(t) = hS(T_{th} - T(t))$



Doc. 21 Évolution de T en fonction de t, avec $T_{th} = 315$ K et $T_0 = 280$ K.

Loi d'évolution d'un système au contact d'un thermostat

L'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ d'un corps solide plongé dans un fluide à la température T s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{C}T = \frac{hS}{C}T_{th}$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre constant.

Équation différentielle p. 28 à 31

La solution de cette équation différentielle, en tenant compte de la valeur initiale, a pour expression : $T(t) = T_{th} + (T_0 - T_{th})e^{-t/\tau}$

où $\tau = \dfrac{C}{hS}$ est le temps caractéristique, exprimé en secondes.

5 Loi de vitesse d'ordre 1

a. Réaction d'ordre 1

Une réaction en solution aqueuse a pour équation $a\,\mathrm{A} \rightarrow b\,\mathrm{B} + c\,\mathrm{C}$.

La vitesse de disparition du réactif A s'écrit : $V_{D(A)}(t) = -\dfrac{d[A]}{dt}(t)$.

Une réaction chimique suit une **loi de vitesse d'ordre 1** par rapport au réactif A si la vitesse volumique de disparition de A est proportionnelle à la concentration en A :

$$\boldsymbol{V_{D(A)}(t) = k[A](t)}$$

La constante k est appelée **constante de vitesse** et s'exprime en s^{-1}.

b. Loi d'évolution pour une réaction d'ordre 1

L'équation différentielle vérifiée par [A] à la date t s'écrit :

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A] \quad \text{soit} \quad \frac{d[A]}{dt} + k[A] = 0$$

C'est une équation différentielle homogène d'ordre 1, à coefficients constants. Sa solution a pour expression $[A](t) = Ce^{-kt}$ où C est une constante. La **condition initiale** s'écrit à la date $t = 0$: $[A](0) = Ce^0$ soit $[A]_0 = C$. On en déduit la loi d'évolution.